Topologia

Lista 2 (topologia, operacje na zbiorach)

Zad 1. Opisać topologię oraz rodzinę zbiorów domkniętych wyznaczonych przez metrykę dyskretną.

Zad 2. Porównać wszystkie topologie z zadań 5, 6, 7, 8 z listy 1.

Zad 3. Które z podanych rodzin stanowią topologię na zbiorze $X = \{a, b, c\}$:

a) $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$,

b) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$,

c) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$,

d) $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$.

Zad 4. Pokazać, że w każdej przestrzeni topologicznej metryzowalnej X, to jest takiej w której topologia pochodzi od metryki,

a) zbiór jednoelementowy jest domknięty,

b) spełniony jest *warunek Hausdorffa*, tj. $\forall_{x,y\in X} \ \exists_{\substack{U,V\subset X \text{ zb. otwarte} \\ x\in U,\, y\in V}} \ \ U\cap V = \emptyset$.

Zad 5. Niech X będzie zbiorem liczb naturalnych. Sprawdzić, które z danych rodzin są topologiami na X:

$$F_1 = \{\{1, 2, 3, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}, \qquad F_2 = \{\{1, 3, 5, ..., 2n-1\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\},$$

$$F_3 = \{A \subset X : \ A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A = X\},$$

$$F_4 = \{A \subset X : X \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A = \emptyset\}$$

Dla rodzin będących topologiami wyznaczyć rodziny zbiorów domkniętych i sprawdzić, czy pochodzą one od metryki?

Zad 6. Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem, gdzie X jest zbiorem a (Y, τ) przestrzenią topologiczną. Czy rodzina $\tau_f = \{f^{-1}(U) : U \in \tau\}$ jest topologią na X?

Zad 7. Sprawdzić, że jeżeli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną i $A \subset X$, to para (A, τ_A), gdzie $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ jest przestrzenią topologiczną.

Zad 8. Pokazać, że wykonując dowolną ilość razy operacje domknięcia i dopełnienie na ustalonym podzbiorze przestrzeni topologicznej otrzymamy maksymalnie 14 różnych zbiorów. Ile zbiorów otrzymamy w przypadku podzbioru $(0, 1) \cap \mathbb{Q} \cup [2, 3) \cup \{5\}$ prostej euklidesowej $\mathbb{R}$?

Zad 9. Wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną danego podzbioru prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, d_e)$:

$$A = \mathbb{N}, \quad B = \mathbb{Z}, \quad C = \mathbb{Q}, \quad D = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \quad E = \mathbb{R}, \quad F = (0, 3], \quad G = (-\infty, 5],$$

$$H = (1, 2) \setminus \mathbb{Q}, \quad I = [-3, 3) \cup (5, +\infty), \quad J = \left\{x = 2^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x : |x - 4| < 1\},$$

$$K = \left\{x = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{x : |x| > 2\}, \quad L = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \Big([1, 2] \cap \mathbb{Q}\Big).$$

Zad 10. Na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$ wyznaczyć wnętrze, domknięcie, brzeg oraz pochodną zbioru

$$A = [0, 1] \times [0, 1), \quad B = \left\{\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad C = \{(x, y) : y = \sin\frac{1}{x}, \ x > 0\},$$

$$D = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Q}\}, \quad E = \left\{(x, y) : y = \frac{1}{n}x, \ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad F = \{(x, y) : y = qx, \ q \in \mathbb{Q}\},$$

$$G = \left\{(x, y) : y^2 + x^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2, \ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad H = \{(x, y) : x \in [1, 2) \cap \mathbb{Q}, \ y \in (1, 2) \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Zad 11. Sprawdzić, czy zbiór $\{tp + (t - 1)q : t \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}^2$, jest otwarty w metryce: a) euklidesowej, b) rzeka, c) studnia.